# Capítulo 2

# Espacios normados

## 2.1. Introducción

Habíamos visto en el capítulo anterior que en los espacios de prehilbertianos se podía definir una norma a través del producto escalar por la fórmula $\|x\| = (x|y)^{1/2}$, y que ésta cumplía unas propiedades. En particular, tales propiedades servían para introducir una noción de distancia natural en dicho espacio, y por tanto una topología y una noción de convergencia. Como veremos en algunos ejemplos, en espacios sin producto escalar también puede definirse una norma con las mismas propiedades. Ello conduce a la noción de espacio normado y, en caso de haber completitud, al concepto de espacio de Banach. En este capítulo se estudiará la estructura de los espacios normados, la caracterización de las normas que conducen a una misma topología, así como de la continuidad de aplicaciones lineales entre espacios normados y de las normas que provienen de un producto escalar, y las profundas diferencias existentes entre los espacios normados de dimensión finita y los de dimensión infinita.

## 2.2. Espacios normados y espacios de Banach

Comencemos con la definición de norma, que axiomatiza algunas propiedades de la norma cuadrática. En principio, el cuerpo base de nuestro espacios vectoriales será $\mathbb{R}$, aunque la mayoría de los resultados que es expondrán son válidos también en espacios vectoriales complejos.

**Definición 2.2.1.** Sea $X$ un espacio vectorial. Decimos que una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ es una norma sobre $X$ si verifica, para todos los vectores $x, y \in X$ y todo escalar $\lambda$, las siguientes propiedades:
(a) $\|x\| \geq 0$
(b) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$
(c) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
Llamaremos *espacio normado* a un espacio vectorial dotado de una norma.

**Ejemplos 2.2.2.** 1. Todo espacio prehilbertiano, con la norma cuadrática, es un espacio normado. Por ejemplo, $\mathbb{R}^n$, dotado de la norma $\|x\|_2 := (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$, donde $x = (x_1, ..., x_n)$, es un espacio normado.
2. La aplicación $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$ es una norma sobre $\mathbb{R}^n$.
3. Asimismo, lo es $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$. Que son normas sobre $\mathbb{R}^n$ esta función y la del ejemplo anterior es fácil de probar.
4. Sea $p \in (1, +\infty)$. Para cada $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos $\|x\|_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$. Veamos que es una norma. Para ello necesitamos un resultado de convexidad, a saber, para cada $\alpha \in (0, 1)$, la función $\varphi : t \in (0, +\infty) \mapsto t^\alpha \in \mathbb{R}$ es cóncava. En efecto, $\varphi''(t) = \alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2} < 0$. Por tanto, la curva que representa $\varphi$ está por debajo de su tangente en el punto $t_0 = 1$, es decir, $t^\alpha \leq \alpha t + 1 - \alpha$ para todo $t > 0$. Si ponemos $t = u/v$, con $u, v > 0$, resulta

$$u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1 - \alpha)v \quad (u, v > 0). \tag{1}$$

Ahora probamos la *desigualdad de Hölder*, a saber, si $q$ es el "exponente conjugado" o "exponente dual" de $p$, es decir, el único $q > 1$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, entonces, para todos los números reales $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

Si todos los $x_i$ o todos los $y_i$ son nulos, la desigualdad es obvia. Si éste no es el caso, tomemos $\alpha = 1/p$, $u = u_i = \frac{|x_i|^p}{\sum_{k=1}^{n} |x_i|^p}$, $v = v_i = \frac{|y_i|^p}{\sum_{k=1}^{n} |y_i|^p}$ $(i = 1, \ldots, n)$ en la expresión (1), y sumemos para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Obtenemos así

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i||y_i|}{(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p}(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{1/q}} = \sum_{i=1}^{n} u_i^{\alpha} v_i^{1-\alpha}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}(\alpha u_i + (1-\alpha)v_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} u_i + (1-\alpha)\sum_{i=1}^{n} v_i = 1,$$

de donde se infiere lo que queremos. De la desigualdad de Hölder se deduce la *desigualdad de Minkowski*:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

En efecto, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i + y_i|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1}(|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1}|y_i|$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/q} \left\{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}\right\},$$

de donde se deduce lo que queríamos; la desigualdad de Hölder se ha aplicado en la última desigualdad. La desigualdad de Minkowski muestra que $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ para todo par de vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$. De aquí obtenemos que $\|\cdot\|_p$ es una norma sobre $\mathbb{R}^n$.

5. Consideremos el espacio vectorial $c_0$ de la sucesiones reales $(x_n)$ que tienden a 0. Es un espacio normado con la norma del supremo, $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Lo mismo ocurre con el espacio $c_{00}$ de las sucesiones reales casi nulas, es decir, de las sucesiones $x = (x_n)$ tales que existe $N = N(x) \in \mathbb{N}$ con $x_n = 0$ para todo $n \geq N$. Con la misma norma, también el espacio vectorial $l_\infty$ de las sucesiones reales acotadas es un espacio normado. Nótese que $c_{00} \subset c_0 \subset l_\infty$.

6. Ya vimos en el capítulo anterior que $l_2$ podía ser dotado de un producto escalar, luego es un espacio normado.

7. Sea $p \in [1, +\infty)$. Consideremos el conjunto $l_p$ de las sucesiones reales $x = (x_n)$ tales que $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < +\infty$. Usando la desigualdad de Minkowski demostrada en el Ejemplo 4, y haciendo que $n \to \infty$, se prueba con facilidad que $l_p$ es un espacio vectorial y que $\|x\|_p := (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{1/p}$ es una norma sobre él.

8. El espacio $C([a,b])$ es un espacio normado si se le dota de la aplicación $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in [a,b]\}$. Se prueba fácilmente que tal aplicación es una norma. Observemos que, en este espacio normado, $f_n \to f$ si y sólo si $f_n \to f$ uniformemente en $[a,b]$.

9. En este ejemplo, como es habitual en estos casos, estamos considerando iguales dos funciones si son iguales en casi todo, respecto de la medida de Lebesgue. Sea $p \in [1, +\infty)$, y sea $L^p = L^p([a,b])$ la clase de las funciones medibles $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $\int_a^b |f|^p < +\infty$. Entonces $L^p$ es un espacio vectorial y la aplicación $\|f\|_p = (\int_a^b |f|^p)^{1/p}$ es una norma sobre él.

En efecto, este hecho es fácil de probar para $p = 1$, usando el álgebra de funciones medibles y la desigualdad triangular en $\mathbb{R}$. Probemos el resultado para $p \in (1, +\infty)$. Es evidente que $\lambda f \in L^p$ si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in L^p$, y que $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$. Sean $f, g \in L^p$. Queremos probar que $f + g \in L^p$. En primer lugar, $f + g$ es medible, y de la desigualdad $(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$ $(a, b \geq 0)$ se deriva con facilidad que $f + g \in L^p$.

Aplicamos (1) a $\alpha = 1/p$, $u = \frac{|f(t)|}{\int_a^b |f|^q}$ y $v = \frac{|g(t)|}{\int_a^b |g|^p}$, donde $t \in [a, b]$ y $q$ es el exponente conjugado de $p$. Integrando la desigualdad resultante entre $a$ y $b$, obtenemos la desigualdad de Hölder para integrales, a saber,

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\, dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q\, dt\right)^{1/q}.$$

Para la desigualdad de Minkowski, notemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f + g|^p &= \int_a^b |f + g|^{p-1}(|f| + |g|) \\ &= \int_a^b |f + g|^{p-1}|f| + \int_a^b |f + g|^{p-1}|g| \qquad (2) \end{aligned}$$

Observemos que $|f + g|^{p-1} \in L^q$, porque $|f + g|^{q(p-1)} = |f + g|^p$. Aplicando la desigualdad de Hölder a cada uno de los sumandos de (2), se obtiene

$$\int_a^b |f + g|^p \leq \left(\int_a^b |f + g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left[\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}\right],$$

de donde derivamos la desigualdad de Minkowski, a saber,

$$\left(\int_a^b |f + g|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}.$$

De otra forma, $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, que es la desigualdad triangular. Sigue que $L^p$ es un espacio normado.

Como ya vimos en el Capítulo 1, la norma $\|\cdot\|$ induce una distancia o métrica $d(x, y) := \|x - y\|$ en el espacio normado, y por tanto una topología sobre él. Debido a ésto, tiene sentido hablar de continuidad de una aplicación. El siguiente resultado se deduce fácilmente de las propiedades de la norma, y su prueba se deja como ejercicio.

**Proposición 2.2.3.** *Supongamos que $X$ es un espacio normado. Entonces las aplicaciones norma $x \in X \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$, suma $(x, y) \in X \times X \mapsto x+y \in X$ y producto por escalares $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X \mapsto \lambda x \in X$, son continuas.*

La existencia de una métrica natural en un espacio normado permite hablar de completitud.

**Definición 2.2.4.** Se llama *espacio de Banach* a un espacio normado que es completo para la distancia inducida por su norma.

**Ejemplos 2.2.5.** 1. Es fácil demostrar que los espacios $c_0$ y $l_\infty$ son completos. Para ello, tener en cuenta que $\mathbb{R}$ es completo y que, si una sucesión es de Cauchy $\|\cdot\|_\infty$, entonces cada sucesión componente debe ser de Cauchy en $\mathbb{R}$. Pero el espacio normado $c_{00}$ no es completo: Basta considerar la sucesión $x_1 = (1, 0, 0, 0, ...)$, $x_2 = (1, 1/2, 0, 0, 0, ...)$, $x_3 = (1, 1/2, 1/3, 0, 0, 0, ...), \dots$, que es de Cauchy pero no converge.
2. En del Capítulo 1 se vio que $l_2$ es completo. Asimismo, cada $l_p$ $(1 \leq p < +\infty)$ es un espacio de Banach.
3. De modo análogo a $L^2$ (ver Capítulo 1), se puede demostrar que los espacios $L^p$ $(1 \leq p < +\infty)$ son completos.
4. Recordemos del Capítulo 1 que $C([a, b])$ dotado de la norma cuadrática no es completo. Sin embargo, si se le dota de la norma del supremo, $C([a, b])$ es un espacio de Banach. Para verlo, úsese la condición de Cauchy de convergencia uniforme (a saber, una sucesión de funciones $(f_n)$ converge uniformemente en $[a, b]$ a alguna función $[a, b] \to \mathbb{R}$ si y sólo si, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para todo $m, n \geq n_0$ y todo $x \in [a, b]$) y el hecho de que la convergencia uniforme preserva la continuidad.

De la continuidad de las aplicaciones suma y producto por escalares, de la caracterización por sucesiones de la clausura de un subconjunto en un espacio métrico, y del hecho de que, en un espacio métrico completo, un subconjunto es cerrado si y sólo si es completo (con la métrica inducida), se puede demostrar sin dificultad el siguiente teorema. Los detalles de la demostración se dejan como ejercicio.

**Teorema 2.2.6.** *Sea $X$ un espacio normado, y supongamos que $Y$ es un subespacio vectorial de $X$. Se verifica:*
(a) $\overline{Y}$ *es un subespacio vectorial de $X$.*
(b) *Si $X$ es de Banach e $Y$ es cerrado, entonces $Y$ es un espacio de Banach.*

Para concluir, recordemos que todo producto escalar general una norma. Surge entonces la pregunta de si cada norma proviene de algún producto escalar. Puede probarse que, dada una norma $\|\cdot\|$ sobre un espacio vectorial $X$, existe un producto escalar $(\cdot|\cdot)$ sobre $X$ tal que $\|\cdot\| = (\cdot|\cdot)^{1/2}$ si y sólo si $\|\cdot\|$ cumple la identidad del paralelogramo. En tal caso, se tiene la *identidad de polarización*:

$$(x|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \quad (x, y \in X).$$

## 2.3. Operadores lineales continuos. Normas equivalentes. Espacio dual

Vamos a probar que la continuidad de un operador lineal entre espacios normados es equivalente a la continuidad en un punto y a la continuidad uniforme. Mediante $\|\cdot\|$ denotaremos indistintamente, mientras no dé lugar a confusión, la norma tanto del espacio de salida como del espacio de llegada.

**Teorema 2.3.1.** *Sean $X$ e $Y$ espacios normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(a) *$T$ es continua en algún punto $x_0 \in X$.*
(b) *$T$ es continua.*

(c) $T$ *es uniformemente continua.*

(d) *Existe* $M \in (0, +\infty)$ *tal que* $\|Tx\| \leq M\|x\|$ *para todo* $x \in X$*.*

*Demostración.* Se tiene, obviamente, la siguiente cadena de implicaciones: (d) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a). Así que es suficiente probar (a) $\Rightarrow$ (d). Para ello, tomemos un punto $x_0 \in X$ donde $T$ es continua. Entonces, dado $\varepsilon = 1$, podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta$ implica $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$. Sea $y \in X$ con $\|y\| < \delta$. Entonces $\|Ty\| = \|T(y + x_0) - Tx_0\| < 1$. Sea ahora $x \in X \setminus \{0\}$. Entonces $\|\frac{\delta x}{2\|x\|}\| < \delta$, luego $\|T(\frac{\delta x}{2\|x\|})\| < 1$. Por tanto $\|Tx\| \leq M\|x\|$, donde $M = 2/\delta$. Para $x = 0$, la desigualdad anterior es trivial. □

Si $X$ e $Y$ son dos espacios vectoriales y $T : X \to Y$ es lineal y biyectiva, entonces la aplicación inversa $T^{-1} : Y \to X$ es también lineal. Tal $T$ se dice que es un isomorfismo algebraico. Si $X$ e $Y$ son dos espacios normados, por *isomorfismo* entre ellos se entenderá un isomorfismo algebraico que es también topológico, es decir, tal que $T$ y $T^{-1}$ son continuas.

**Teorema 2.3.2.** *Supongamos que* $X$ *e* $Y$ *son dos espacios normados y que* $T : X \to Y$ *es un isomorfismo entre ellos. Entonces existen dos constantes* $m, M \in (0, +\infty)$ *tales que*

$$m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\| \quad \textit{para todo } x \in X.$$

*Demostración.* Resulta de aplicar el teorema anterior a $T$ y a $T^{-1}$. □

Hay que tener presente que en un espacio vectorial $X$ pueden definirse distintas normas. Diremos que dos normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ en $X$ son *equivalentes* cuando generan la misma topología. Del teorema anterior obtenemos una caracterización de la equivalencia de normas.

**Corolario 2.3.3.** *Dos normas* $\|\cdot\|_1$ *y* $\|\cdot\|_2$ *sobre un espacio vectorial* $X$ *son* *equivalentes si y sólo si existen dos constantes* $m, M \in (0, +\infty)$ *tales que*

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \quad \textit{para todo } x \in X.$$

*Demostración.* Aplicar el teorema anterior a la aplicación identidad $T = I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$. □

El Teorema 2.3.1 motiva el concepto de *norma de un operador lineal*, ver Teorema 2.3.4. Si $X$ e $Y$ son dos espacios normados, denotaremos por $L(X, Y)$ el conjunto de todas las aplicaciones lineales y continuas de $X$ en $Y$. Es fácil ver que, dotado de las operaciones usuales de suma y de producto por escalares, $L(X, Y)$ es un espacio vectorial. En el caso particular $Y = \mathbb{R}$, el espacio $L(X, \mathbb{R})$ se llama el *espacio dual* de $X$.

**Teorema 2.3.4.** *Sean $X$ e $Y$ dos espacios normados. Para cada $T \in L(X, Y)$, se define*

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\}\right\} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}.$$

*Entonces $\|\cdot\|$ es una norma sobre $L(E, F)$. Además,*

$$\|T\| = \text{mín}\{M \in [0, +\infty) : \|Tx\| \leq M\|x\| \ \forall x \in X\}.$$

La prueba es mecánica, y se deja como ejercicio. Puede demostrarse que si $Y$ es de Banach entonces $L(X, Y)$ es de Banach. En particular, el espacio dual de cualquier espacio normado es un espacio de Banach. Para cerrar esta sección, mostraremos que todo espacio de Hilbert puede identificarse perfectamente con su dual.

**Teorema 2.3.5.** *Si $H$ es un espacio de Hilbert, entonces su dual $L(H, \mathbb{R})$ es isométricamente isomorfo a $H$.*

*Demostración.* Gracias al Teorema de Representación de Riesz, la aplicación $\Phi : y \in H \mapsto T_y \in L(H, \mathbb{R})$ definida por $T_y(x) = (x|y)$ $(x \in X)$ es biyectiva.

Es fácil ver que es $\Phi$ es lineal. Basta ver que $\Phi$ es una isometría, es decir, que conserva las distancias, pues entonces también sería bicontinua, o sea, continua ella y su inversa. Probemos pues que $\Phi$ es una isometría. Ya que $\Phi$ es lineal, hay que probar que $\|\Phi y\| = \|y\|$ para todo $y \in H$.

Para $y = 0$ es trivial. Así pues, fijemos $y \in H \setminus \{0\}$, y sea $x \in H$. Entonces $\|(\Phi y)x\| = |T_y(x)| = |(x|y)| \leq \|y\|\|x\|$, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Por la definición de norma de una aplicación lineal y continua, esto implica que $\|\Phi y\| \leq \|y\|$. Ahora bien, para $x = y$ se tiene que $\|(\Phi y)y\| = |(y|y)| = \|y\|\|y\|$, luego $\|(\Phi y)y\|/\|y\| = \|y\|$. Por tanto $\|\Phi y\| \geq \|y\|$. $\square$

## 2.4. Espacios normados de dimensión finita

Sabemos que cualquier espacio vectorial $X$ de dimensión finita $n$ es isomorfo algebraicamente a $\mathbb{R}^n$. Vamos a ver que, si $X$ es normado, entonces $X$ es isomorfo también topológicamente a $\mathbb{R}^n$ con cualquiera de sus normas.

**Teorema 2.4.1.** *Sea $X$ un espacio normado de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y $T : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to X$ un isomorfismo algebraico. Entonces $T$ es bicontinua.*

*Demostración.* Denotemos $u_i = Te_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Si $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, se tiene que $Tx = \sum_{i=1}^n \xi_i u_i$. Entonces $T$ es continua porque la convergencia en $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ implica la convergencia en cada coordenada y las operaciones de suma y producto por escalares en un espacio normado son continuas.

Probemos que $T^{-1}$ es también continua. Para ello, consideremos la esfera unidad $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$, que es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$, luego es compacto. Ya que $T$ es continua, $T(S)$ es también compacto. Como $\|\cdot\|$ es continua en $X$, alcanza un mínimo $m$ en $T(S)$. Debe ser $m > 0$, pues si fuera $m = 0$ existiría algún punto $x_0 \in S$ con $\|Tx_0\| = 0$, y por tanto $x_0 = 0$ (pues $T$ es biyectiva), lo que es absurdo. Sea ahora $x \in X \setminus \{0\}$.

Entonces $\frac{T^{-1}(x)}{\|T^{-1}(x)\|_2} \in S$, luego

$$\left\| T\left(\frac{T^{-1}(x)}{\|T^{-1}(x)\|_2}\right) \right\| \geq m,$$

de donde se deduce $\frac{\|x\|}{\|T^{-1}(x)\|_2} \geq m$, y así $\|T^{-1}(x)\|_2 \leq (1/m)\|x\|$. En consecuencia, $T^{-1}$ es continua. □

Del resultado anterior obtenemos, a continuación, algunas consecuencias.

**Corolario 2.4.2.** *Todas la normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.*

*Demostración.* Sea $\|\cdot\|$ una norma sobre $\mathbb{R}^n$. La aplicación identidad $I : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ es un isomorfismo algebraico. Por el teorema anterior, $I$ es bicontinua, luego $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|$ son normas equivalentes. La conclusión sigue de que la equivalencia de normas es una relación de equivalencia. □

**Nota 2.4.3.** La conclusión del corolario anterior no es válida para espacios de dimensión infinita. Por ejemplo, en $l_1$, su norma natural $\|\cdot\|_1$ no es equivalente a la norma $\|\cdot\|_\infty$. En efecto, la sucesión $(x_n)$ dada por $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k$ (donde $e_k = (0, 0, ..., 0, 0, 1, 0, 0, 0, ...)$, con el 1 en el lugar $k$) tiende a 0 en $\|\cdot\|_\infty$, pero no es de Cauchy respecto de $\|\cdot\|_1$.

**Corolario 2.4.4.** *Sea $Y$ un subespacio de dimensión finita de un espacio normado $X$. Entonces $Y$ es cerrado.*

*Demostración.* Por el Teorema 2.4.1, existe un isomorfismo topológico

$$T : Y \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2).$$

Sea $(x_n)$ una sucesión en $Y$ con $x_n \to x \in X$. En particular, $(x_n)$ es de Cauchy. Del Teorema 2.3.2 se deduce fácilmente que $(Tx_n)$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, que es completo, luego existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $Tx_n \to y$. De la continuidad de $T^{-1}$ obtenemos que $x_n \to T^{-1}y \in Y$. De la unicidad del límite en un espacio métrico, sigue que $x = T^{-1}y$. Por tanto, $x \in Y$, y así $Y$ es cerrado. □

**Corolario 2.4.5.** *Supongamos que $X$ es un espacio normado de dimensión finita y que $A \subset X$. Entonces $A$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

*Demostración.* Las propiedades de ser acotado, de ser cerrado y de compacidad se conservan por isomorfismos topológicos entre espacios normados. Luego el Teorema de Heine-Borel, que caracteriza la compacidad en $\mathbb{R}^n$, conserva su validez en $X$. $\square$

Para finalizar este capítulo, veremos que esta última propiedad caracteriza los espacios normados de dimensión finita. Antes necesitamos un resultado auxiliar, que es interesante en sí mismo.

**Teorema 2.4.6.** [*Lema de Riesz*]. *Sea $X$ un espacio normado y $X_0$ un subespacio cerrado de $X$ con $X_0 \neq X$. Entonces, para cada $\theta \in (0,1)$, existe un vector $x_\theta \in X$ tal que*

$$\|x_\theta\| = 1 \quad y \quad \|x - x_\theta\| \geq \theta \ \ \textit{para todo} \ \ x \in X_0.$$

*Demostración.* Tomemos $x_1 \in X \setminus X_0$ y llamemos $d = d(x_1, X_0)$. Notemos que $d > 0$ porque $X_0$ es cerrado. Fijemos $\theta \in (0,1)$. Entonces $d/\theta > d$. Se deduce que existe $x_0 \in X_0$ tal que $\|x_1 - x_0\| < d/\theta$. Tomemos $x_\theta := \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|}$. Si $x \in X_0$, tenemos que $\|x_1 - x_0\|x + x_0 \in X_0$, luego

$$\begin{aligned}
\|x - x_\theta\| &= \left\| x + \frac{x_0}{\|x_1 - x_0\|} - \frac{x_1}{\|x_1 - x_0\|} \right\| \\
&= \frac{1}{\|x_1 - x_0\|} \| \|x_1 - x_0\|x + x_0 - x_1 \| \geq \frac{d}{\|x_1 - x_0\|} \geq \theta,
\end{aligned}$$

como se quería demostrar. $\square$

Puntualizamos aquí que para $\theta = 1$ la conclusión del Lema de Riesz no es válida.

**Teorema 2.4.7.** *Sea $X$ un espacio normado tal que su bola unidad cerrada es compacta. Entonces* $\dim X < +\infty$.

*Demostración.* Si $\dim X = +\infty$, tomamos $x_1 \in S := \{x \in X : \|x\| = 1\}$, y sea $X_1 = \langle x_1 \rangle$, que es un subespacio de $X$. Además, es un subespacio cerrado, por ser de dimensión finita. Pero $X_1 \neq X$, pues $X$ es de dimensión infinita. Por el Lema de Riesz, existe $x_2 \in S$ tal que $\|x_2 - x_1\| \geq 1/2$. Entonces $\langle x_1, x_2 \rangle$ es un subespacio cerrado de $X$ que, de nuevo, no coincide con $X$. Usando una vez más el Lema de Riesz, existe un vector $x_3 \in S$ tal que $\|x_3 - x_1\| \geq 1/2$ y $\|x_3 - x_2\| \geq 1/2$. Procediendo por inducción, obtenemos una sucesión $(x_n)$ tal que $\|x_n - x_m\| \geq 1/2$ si $m \neq n$, luego esta sucesión no tiene ninguna subsucesión convergente, lo que va en contra de la compacidad de la bola unidad cerrada. $\square$